MAI 1 - domácí úkol ze cvičení 3:

1. Promyslete a pečlivě sepište řešení aspoň jednoho z následujících problémků, pokud jste je už neřešili dobrovolně v úkolu z druhého cvičení :

   Je dáno zobrazení $f : A \to B$ a $M, M_i \subseteq A$, $N, N_i \subseteq B$, $(i = 1,2)$;
   označme $f(M) = \{b \in B; \exists a \in M : f(a) = b\}$ a $f^{-1}(N) = \{a \in A; f(a) \in N\}$.
   Rozhodněte, zda platí následující tvrzení a pokud některé neplatí, pokuste se charakterizovat zobrazení, pro která tvrzení platí:
   a) $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$; $f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$;
   b) $f(M_1 \cap M_2) = f(M_1) \cap f(M_2)$; $f^{-1}(N_1 \cap N_2) = f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$;
   c) $\forall M \subseteq A : f^{-1}(f(M)) = M$; $\forall N \subseteq B : f(f^{-1}(N)) = N$.

2. Najděte v R (pokud existují) supremum, infimum, maximum, minimum následujících množin (a sepište důkaz aspoň jednoho z vašich tvrzení) :
   a) $M_1 = \left\{1 - \frac{1}{n^2}; n \in N\right\}$; b) $M_2 = \left\{\frac{n + (-1)^n}{n}; n \in N\right\}$; c) $M_3 = \left\{n^{(-1)^n}; n \in N\right\}$;
   d) $M_4 = \left\{n^2 - m^2; m, n \in N, n > m\right\}$; e)* $M_5 = \left\{q < \sqrt{3}; q \in Q\right\}$.

3. Ukažte, že pro neprázdné množiny A, B reálných čísel platí: $(\forall a \in A\ \forall b \in B : a \leq b) \Rightarrow (\sup A \leq \inf B)$.

4. Nechť podmnožiny A, B množiny reálných čísel jsou neprázdné a omezené. Co lze říci o supremu a infimu množin $A \cup B$ a $A \cap B$. „Vaše“ tvrzení dokažte !

A dobrovolně můžete promyslet:

5. Dokažte aspoň jedno z následujících tvrzení:
   a) Je-li $x \in R, x \neq 0$, pak opačný prvek $-x$ a inverzní prvek x^{-1} jsou určené jednoznačně ;
   b) $\forall x \in R$: $0..x = 0$; $-x = (-1).x$; $\forall x \in R: -(-x) = x$;
   c) $\forall x, y \in R$: $(-x).(-y) = x.y$;
   d) $0 < x \Rightarrow -x < 0$; $x < y \Rightarrow -x > -y$.